

Der Wirkungsgrad von Verdrängermaschinen

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Peter Pelz, Dr.-Ing. Gerhard Ludwig

Der folgende Beitrag geht vom Allgemeinen, nämlich dem ersten Hauptsatz und unterschiedlichen äquivalenten Formulierungen des Wirkungsgrades einer Fluidenergiemaschine über eine Ordnung und Systematisierung von Fluidenergiemaschinen zu einer Betrachtung des Wirkungsgrades von Verdrängermaschinen. Durch die zunehmende Konkretisierung und kritische Auseinandersetzung mit dem Thema wird die wissenschaftliche Voraussetzung für eine Normungstätigkeit gelegt.

1. Axiome, Exergie, Wirkungsgrad und Ineffizienz

Im Folgenden wird der Energiewandlungsprozess in einer Fluidenergiemaschine betrachtet. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Maschine im zeitlichen Mittel stationär arbeitet. In diesem Fall lautet die Energiebilanz für die Maschine (1. Axiom):

$$\dot{m}\Delta h_t = P_w + \dot{Q}. \quad (1)$$

D.h. für den wichtigen Fall der thermisch isolierte Maschine $\dot{Q} = 0$ ist die dem Medium unmittelbar zugeführte (innere) mechanische Leistung $P_w = M_w\Omega$, dargestellt als inneres Wellenmoment M_w mal Kreisfrequenz Ω oder zeitliches Mittel von Kraft mal Geschwindigkeit, gleich dem Massenstrom \dot{m} multipliziert mit zeitlichen Mittelung der totalen Enthalpiedifferenz $\Delta h_t = h_{t2} - h_{t1}$ zwischen Maschinenaustritt 2 und Maschineneintritt 1. Im zeitlichen Mittel lautet der zweite Hauptsatz für die Maschine:

$$\dot{m}\Delta s = \frac{\dot{Q}}{T_0} + \Delta\dot{S}_{irr}. \quad (2)$$

Für den wichtigen Fall der thermisch isolierten Maschine, erfährt das Medium bei der Energiewandlung die Entropieänderung $\Delta s = s_2 - s_1$. Sie ist allein durch die irreversible Entropieproduktion $\Delta\dot{S}_{irr}$ durch Reibung bedingt.

Exergie

Da in der gegenwärtigen Diskussion um Energieeffizienz auch Exergiebetrachtungen z.B. bei Systemoptimierung von

Druckluftanwendungen zunehmend diskutiert wird, sollte an dieser Stelle sehr passend die Exergie eingeführt werden. Die Exergie bietet einen Bewertungsmaßstab für Fluidsysteme, zeigt aber nicht den Weg zu energieoptimalen Systemen (vgl. den Beitrag „Besser geht’s nicht“ in dieser Zeitschrift). Allgemein gesprochen ist die Exergie ein Maß für das Arbeitsvermögen eines Stoffes gegenüber der Umgebung. D.h. die Exergie ist eine relative Größe und damit im eigentlichen Sinne keine thermodynamische Zustandsgröße. Die Exergie taucht ganz natürlich auf, wenn der zweite Hauptsatz in den ersten Hauptsatz eingesetzt wird, mit dem Ziel den Wärmestrom zu eliminieren. Da der Bezug zur Umgebung dargestellt wird, erfolgt der Wärmestrom in die Maschine vom Wärmereservoir der Temperatur T_0 :

$$\dot{m}[\Delta h_t - \Delta s T_0] = \dot{m} \Delta ex = P_w + \Delta \dot{S}_{irr} T_0. \quad (3)$$

Als Abkürzung wird die **Exergie** $ex := h - h_0 - T_0(s - s_0)$ eingeführt. An der Definition wird deutlich, dass damit der thermodynamische „Abstand“ von der Umgebung 0 eines Mediums beschrieben ist. Häufig wird auch von einer Potentialdifferenz gesprochen. Die Bedeutung der Exergie wird insbesondere bei einer Kraftmaschine (Hydromotor, Expander, Turbine, ...) deutlich, die ideal, d.h. reibungsfrei arbeitet und die Flüssigkeit bzw. das Gas bis in das Gleichgewicht mit der Umgebung entspannt. In diesem Fall ist der Wirkungsgrad eins und die Wellenleistung erreicht den theoretisch ideal möglichen Betrag von $\dot{m} ex_1$.

2

Wirkungsgrad

Im Folgenden wird allein der Fall der isolierten Maschine betrachtet. Hierbei ist es sinnvoll und üblich die gesamte Enthalpieänderung in einen idealen Anteil $\Delta h_{t,s}$ (keine Reibung, d.h. keine Entropieproduktion, d.h. Wirkungsgrad gleich eins) und einen Verlustanteil Δh_v aufzuteilen, so dass $\Delta h_t = \Delta h_{t,s} + \Delta h_v$ gilt. Von **Nutzen** ist allein die Leistung $\dot{m}\Delta h_{t,s}$. Der **Aufwand** ist die mechanisch zugeführte Leistung $P_w = \dot{m}\Delta h_t$. Dies motiviert die Definition des inneren Wirkungsgrades (der auch zuweilen isentroper Wirkungsgrad genannt wird):

$$\eta_w := \frac{\dot{m}\Delta h_{t,s}}{M_w\Omega}. \quad \varepsilon_w := 1 - \eta_w = \frac{\dot{m}\Delta h_v}{M_w\Omega}. \quad (4)$$

Manchmal ist es einfacher und günstiger, anstelle des inneren Wirkungsgrad dessen Komplementär, die innere Ineffizienz ε_w , anzugeben. Die Ineffizienz ist ein dimensionsloses Maß für den Enthalpieverlust Δh_V innerhalb der Maschine. Der Enthalpieverlust kann mittels eines Widerstandsgesetzes über einen Verlust- oder Widerstandsbeiwert c_d dargestellt werden. Dabei wird der Verlust mit einer typischen Strömungsgeschwindigkeit u der Maschine (z.B. Umfangsgeschwindigkeit) dimensionslos gemacht: $\Delta h_V = c_d u^2 / 2$. Nach der *Froudeschen Hypothese*, die Grundlage für alle Modellversuche ist, verhalten sich Verluste in einer Maschine additiv. D.h. der Verlustbeiwert c_d setzt sich additiv aus Einzelanteilen für Reibungs-, Mischungs-, Stoß- und andere Verluste zusammen. Für die Einzelverluste sind zumeist physikalische Modelle bekannt, so dass die Enthalpieverluste i.d.R. mit guter Genauigkeit bestimmbar sind [1] [2].

Sowohl Wirkungsgrad als auch Ineffizienz können im Enthalpie-Entropie-Zustandsdiagramm geometrisch interpretiert werden, wenn der erste Hauptsatz (1) in die Definition (4) eingesetzt wird:

$$\eta_w = \frac{\Delta h_{t,s}}{\Delta h_t}, \quad \varepsilon_w = \frac{\Delta h_V}{\Delta h_t}. \quad (5)$$

3

Für kleine kinetische Energieanteile gilt $\Delta h_t \approx \Delta h$, so dass sich das h-s-Zustandsdiagramm in Abb. 1 ergibt, welches für alle thermisch isolierten Maschinen, d.h. insbesondere sowohl für Turbo- als auch Verdrängermaschinen, gilt.

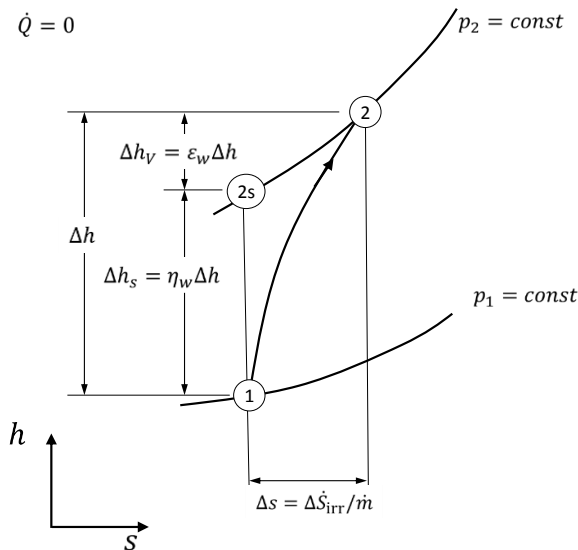


Abb. 1: Geometrische Darstellung von innerem Wirkungsgrad und Ineffizienz im h-s-Zustandsdiagramm für die thermisch isolierte Maschine bei vernachlässigtem kinetischen Energieanteil.

4

Widerstandsgesetze und Skalierung

Aus einer besonders eleganten Formulierung der Ineffizienz lässt sich eine einfache, axiomatisch begründete und damit nachvollziehbare Skalierungsmethode ableiten. Dies soll im Folgenden geschehen: So wie der Enthalpieverlust in Form eines Widerstands- oder Verlustbeiwertes dimensionslos dargestellt werden kann, kann auch die Wellenleistung, die proportional der tatsächlichen Enthalpieänderung ist, als sogenannte Leistungsziffer dimensionslos dargestellt werden: $\Delta h_t := \lambda u^2/2$. Gemeinsam mit dem Verlust $\Delta h_v := c_d u^2/2$ ergibt sich eine sehr kompakte, elegante und praktische Darstellung des Wirkungsgrades und der Ineffizienz:

$$\eta_w = 1 - \frac{c_d}{\lambda}, \quad \varepsilon_w = \frac{c_d}{\lambda}. \quad (6)$$

Denkt man nun über Änderungen des Wirkungsgrades z.B. mit Maschinengröße, Drehzahl, Spalt, Rauheit, ... nach, so bietet es sich an das totale Differential von (6) zu bilden. Dies führt auf die logarithmische Änderung, die in jeder Fehlerrechnung Anwendung findet:

$$\frac{d\varepsilon_w}{\varepsilon_w} = \frac{dc_d}{c_d} - \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (7)$$

Der Übergang der exakten Gleichung (7) zur Skalierungsgleichung ist durch den Übergang vom Differential zur Differenz gegeben:

$$\frac{\eta_w - \eta_{w,\text{ref}}}{1 - \eta_{w,\text{ref}}} \approx -\frac{c_d - c_{d,\text{ref}}}{c_{d,\text{ref}}} + \frac{\lambda - \lambda_{\text{ref}}}{\lambda_{\text{ref}}}. \quad (8)$$

In vielen Validierungen [5] hat sich die leichte und verlässliche Anwendbarkeit von (8) gezeigt, sofern Modelle für Widerstandsbeiwert c_d und Leistungsziffer λ bekannt sind. Ähnliche Methoden sind in jüngster Vergangenheit auch für die nicht thermisch isoliert arbeitende Maschine entwickelt worden. Durch Skalierung sind Messdaten zu korrigieren, so dass tatsächlich der wahre Wirkungsgrad und nicht der scheinbare Wirkungsgrad angegeben werden kann (vgl. [4]).

Zustandsänderung mit schwach veränderlicher Dichte

Bei vielen Maschinen wird die Mediendichte beim Durchgang durch die Maschine nur schwach verändert, so dass $\rho \approx \text{const.}$ gilt. Für diesen wichtigen Fall ist die isentrope Enthalpieänderung durch die Totaldruckdifferenz über die Maschine gegeben: $\Delta h_{t,s} = \Delta p_t / \rho$ und die Verlustenthalpie ist proportional dem Druckverlust $\Delta h_v = \Delta p_v / \rho$. Bei kalorisch idealem Medium mit der Wärmekapazität c , macht sich der Druckverlust in einer Temperaturerhöhung über die Maschine bemerkbar: $\Delta p_v = \rho \Delta e = \rho c \Delta T$. Völlig äquivalent und gleichwertig zur Bestimmungsgleichung (5), ergibt die Definition (4) bei Verwendung des ersten Hauptsatzes (1) die Bestimmungsgleichung für den inneren Wirkungsgrad und die innere Ineffizienz

$$\rho \approx \text{const.}: \quad \eta_w := \frac{Q \Delta p_t}{M_w \Omega}, \quad \varepsilon_w := \frac{Q \Delta p_v}{M_w \Omega}. \quad (9)$$

Dabei bezeichnet $Q = \dot{m} / \rho$ den Volumenstrom. Diesen Abschnitt zusammenfassend kann gesagt werden: Eine Diskussion des Wirkungsgrades von Fluidenergiemaschinen macht nur in Verbindung mit dem ersten und zweiten Hauptsatz Sinn. Es wurde deutlich, dass die Bestimmungsgleichungen (4)= (5)= (6)=(9) für den Wirkungsgrad und die Ineffizienz alle äquivalent sind. Je nach unterschiedlichen physikalisch-technischen Gegebenheiten wird die passende Bestimmungsgleichung gewählt.

2. Systematisierung von Fluidenergiemaschinen nach physikalischem Wirkprinzip

Fluidenergiemaschinen können nach dem physikalischen Wirkprinzip unterschieden werden. Tab. 1 listet fünf Wirkprinzipien, ohne den Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Für die meisten heute bekannten technischen Anwendungen sind das hydrodynamische (Turbomaschinen) und das hydrostatische Prinzip (Verdrängermaschinen) am geeignetsten, wobei eine eindeutige Zuordnung von Anwendung und physikalischem Prinzip nicht möglich und aus unserer Sicht auch nicht erwünscht ist. Jede Zuordnung z.B. durch den Gesetzgeber beschränkt die technische Vielfalt und ist damit innovationshemmend.

Physikalisches Wirkprinzip	Maschinengattung	Beispielanwendung
I. Hydrodynamik	Turbomaschine	Wasserpumpe, ...
II. Hydrostatik	Verdrängermaschine	Schmiermitteltransport, ...
III. Reibung	Viskositätsmaschine	Peristaltik, Dossierung, ..
IV. Sorption	Sorptionsmaschine	Vakuumtechnik, ...
V. Elektrodynamik	elektrodynamische Pumpe	Transport von flüssigem Metall, ...
VI. Elektrokinetik	Elektroosmotische Pumpe	Flüssigkeitstransport auf Zellebene, ...

Tab. 1: Einteilung von Fluidenergiemaschinen nach physikalischem Wirkprinzip.

Hier sollen im Hauptfokus die hydrostatischen Maschinen stehen. Daher ist zunächst eine technologische Abgrenzung zu anderen Maschinen notwendig:

Hydrostatisch arbeitende Fluidenergiemaschinen

Jede hydrostatisch arbeitende Fluidenergiemaschine, ob translatorisch oder rotatorisch, ist dadurch gekennzeichnet, dass in jedem Zyklus Fördermedium in einem Volumen eingeschlossen ist. Dabei wird in der Zykluszeit $1/n$ (Drehzahl $n = \Omega/2\pi$) das *geometrische Volumen* V_G verdrängt. Das geometrische Volumen wird zuweilen auch Hubvolumen oder Schluckvolumen genannt. Das gesamte Fördervolumen der Maschine lässt sich in das geometrische Volumen V_G und das Schadvolumen V_S aufspalten. Der Schadraum ist der Teilraum des Förderraums, der nicht von einer Verdrängerfläche überstrichen wird. Er bildet den am oberen Totpunkt vorhandenen Raum. Die Ventile schließen bzw. öffnen den Förderraum entweder

- selbsttätig,
- gesteuert oder
- geregelt.

Selbsttätige Ventile sind i.d.R. Rückschlagventile, die ab einer kritischen Druckdifferenz schalten. Gesteuerte Ventile sind kinematisch mit der Wellenbewegung gekoppelt und sind häufig als Bauteile gar nicht ausgeführt. Dies gilt z.B. für Zahnradpumpen und Schraubenmaschinen. Geregelt Ventile finden wir heute zunehmend bei Verbrennungskraftmaschinen. Zusammenfassend lassen sich Verdrängermaschinen technologisch nach den in Tabelle 2 gezeigten Kriterien gliedern:

7

Funktionsunterschiede von Verdrängermaschinen		Beispiel
i. Antriebskinematik	translatorisch	Hubkolben, Plunger, ...
	rotatorisch	Zahnradpumpe, Schraubenpumpe, ...
ii. Ventiltyp	selbsttätig	Membranpumpe, ...
	gesteuert	Zahnradpumpe, Schraubenpumpe, ...
	geregelt	(Verbrennungsmotor), ...
iii. Schadvolumen	ohne Schadvolumen	Schraubenmaschine, Exzentrerschneckenpumpe...
	mit Schadvolumen	Hubkolbenmaschine, ...
iv. Förderkinematik	kinematisch pulsationsfrei	Schraubenmaschine, ...
	pulsationsbehaftet	Hubkolbenmaschine, ...

Tab. 2: Funktionale Unterscheidungen von Verdrängermaschinen. Die Tabelle ist um weitere Kriterien erweiterbar.

Die Ventile und der durch sie abgeschlossene Raum unterscheidet Verdrängermaschinen von Turbomaschinen und Viskositätsmaschinen: Im Gegensatz zu Turbomaschinen und Viskositätsmaschinen ist es bei Verdrängermaschinen unmöglich einen Faden vom Eintritt 1 bis zum Austritt 2 zu führen.

Indikatordiagramm einer Verdrängermaschine

Das in Abb. 1 gezeigte h-s-Diagramm beschreibt die Zustandsänderung des Mediums im zeitlichen Mittel über einen Arbeitszyklus. Der Arbeitszyklus selber wird idealerweise im p-V-Diagramm, auch Indikatordiagramm genannt, dargestellt. Damit steigen wir auf eine tiefere, d.h. granular feinere Ebene ein.

Abb. 2 zeigt das Indikatordiagramm einer Verdrängermaschine mit Schadvolumen und selbsttätigen Ventilen. Das Diagramm wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen. Damit ist die pro Zyklus unmittelbar am Medium verrichtete Arbeit

$$W_{w,s} = \oint p dV \quad (10)$$

größer Null. In dem Ringintegral sind evtl. Arbeiten um Carnotsche Stoßverluste der Ventilströmungen und Vermischungsverluste zu überwinden nicht enthalten. Dies wird durch den Index s angezeigt.

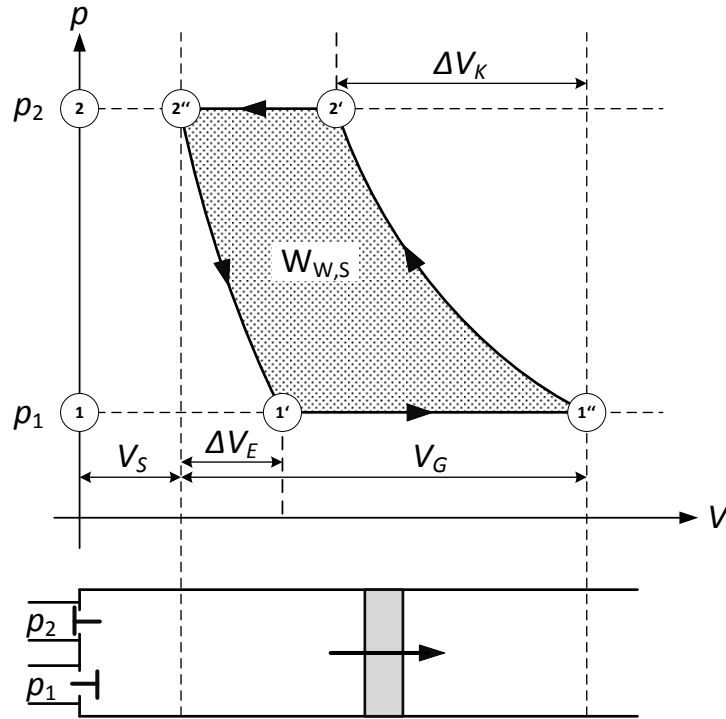


Abb. 2: Indikatordiagramm einer Verdrängermaschine mit selbsttätigen Ventilen und Schadvolumen.

9

Der Schadvolumen V_S reduziert den Fördervolumenstrom: Nach Schließen des Auslassventils an der Stelle 2'' expandiert das im Schadraum eingeschlossene Medium vom Auslassdruck p_2 auf den Einlassdruck p_1 . Dadurch nimmt sein Volumen um das Expansionsvolumen ΔV_E zu. Im Ansaugvorgang steht daher nicht mehr das geometrische Volumen, sondern nur noch das Volumen $V_G - \Delta V_E$ zur Verfügung. Durch Kompression und Expansion bedingt durch Nachgiebigkeit des Mediums aber auch durch Atmen der Maschine (elastische Dehnung der Wände) kommt es zu einem verminderten Volumenstrom.

Bei einer isentropen Kompression und Expansion mit dem Isentropenexponenten γ ist $p_2 \sim V_S^{-\gamma}$ und $p_1 \sim (V_S + \Delta V)^{-\gamma}$. Daraus folgt $\Delta V_E / V_S = (p_2 / p_1)^{1/\gamma} - 1$. Für $\Delta V_E = V_G$ geht das Fördervolumen gegen Null. Dann wird nur noch das Schadvolumen komprimiert und expandiert. Das Schadvolumen begrenzt also das maximal erreichbare Druckverhältnis wie in Abb. 3 dargestellt.

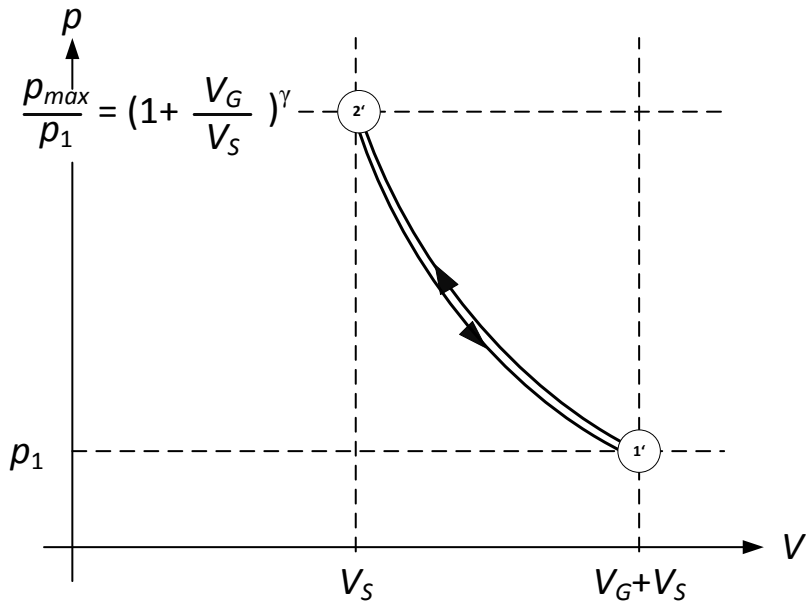


Abb. 3: Maximal erreichbarer Druck einer Verdrängermaschine. Druckbegrenzung durch Expansion des Schadvolumens.

Der dimensionslose Fördervolumenstrom einer Verdrängermaschine wird bei einer Maschine ohne Leckagevolumenstrom $Q_L = 0$ durch Kompression und Expansion des Schadraums ΔV reduziert.

10

$$\begin{aligned} \eta_{vol, Q_L=0} &= \frac{Q}{nV_G} \Big|_{Q_L=0} = 1 - \frac{\Delta V}{V_G} = 1 - \frac{V_S}{V_G} \frac{\Delta V}{V_S} \\ &= 1 - \frac{V_S}{V_G} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Das Volumenstromverhältnis (11) wird auch *volumetrischer Wirkungsgrad* genannt und stellt zunächst nur eine *funktionale Qualität* der Maschine dar. Der in Abbildung 2 gezeigte Prozess ist reversibel. Der Verdichtungsprozess könnte invers als motorischer Expansionsprozess arbeiten und würde die hineingegebene Energie rückgewinnen. Die Kompression und Expansion des Schadvolumens bedeutet zunächst keine energetischen Verluste, so dass die *energetische Qualität* unbeeinflusst ist. Aus energetischer Sicht ist es daher nicht gerechtfertigt von Kompressionsverlusten zu sprechen, sehr wohl aber aus funktionaler Sicht.

Bei den bisherigen Betrachtungen wurden innere Leckageverluste infolge Spaltströmungen von einem Arbeitsraum in einen anderen nicht betrachtet. Diese Spaltströmungen stellen in der Tat energetische

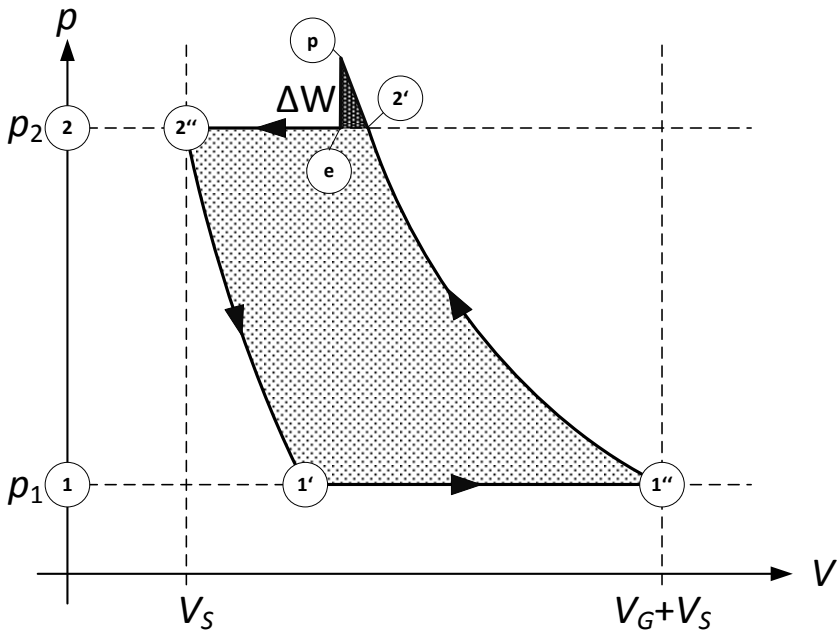
Verluste dar und werden weiter unten im Detail behandelt. Allgemein gilt:

$$\eta_{vol} = \frac{Q}{nV_G} = 1 - \frac{\Delta V_E}{V_G} - \frac{Q_L}{nV_G}, \quad (11)$$

wobei nur der letzte Term für Dissipation verantwortlich ist.

Es gibt allerdings einen energetischen Verlust, der sehr wohl im Indikatordiagramm analysiert werden kann. Dieser tritt nur bei Maschinen mit gesteuerten Ventilen auf (z.B. Schraubenmaschinen).

Expansionsverluste bei gesteuerten Ventilen



12

Abb. 4: Indikator diagramm bei gesteuertem Auslassventil und Überkompression.

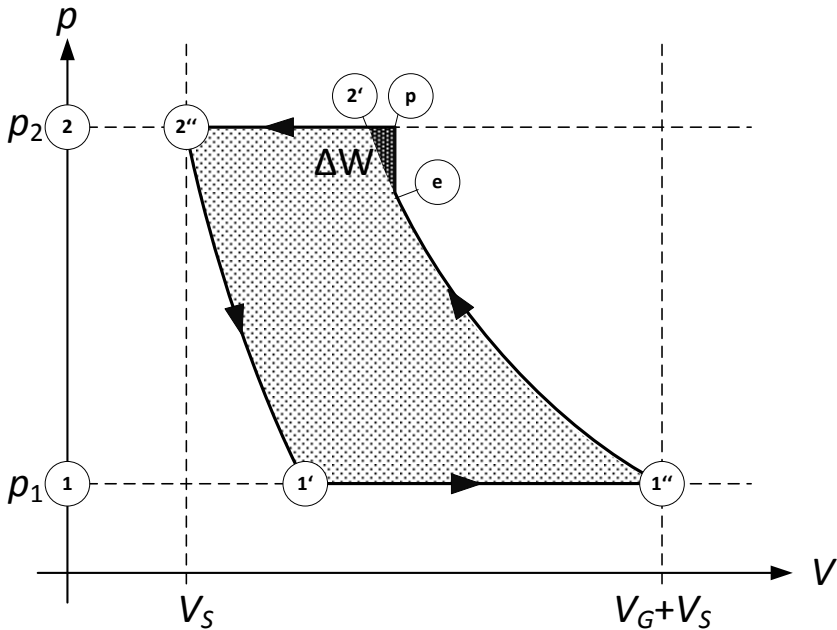


Abb.5: Indikator diagramm bei gesteuertem Auslassventil und Unterkompression

Bei gesteuerten Ventilen ist die Kompression zunächst vom Anlagendruck p_2 entkoppelt. Ist das sogenannte „eingebaute Druckverhältnis“ größer als das durch die Anlage aufgeprägte Druckverhältnis, dann wird das Medium überkomprimiert. Beim Öffnen des Auslassventils am Punkt p (vgl. Abb. 4) kommt es zu einer schlagartigen Entspannung auf den Auslassdruck. Diese Expansion ist mit dem Energieverluste ΔW verbunden, der aber zumeist klein ist. Umgekehrt zeigt Abbildung 5, dass auch ein verfrühtes Öffnen des Auslassventils mit energetischen Verlusten verbunden ist. Allerdings kann sich die plötzliche Freisetzung selbst einer kleinen Energiemenge funktional in Form von Lärm deutlich bemerkbar machen. Unschön sind die damit verbundenen Wellenphänomene, die sich als Pulsationen und Lärm bemerkbar machen. Das plötzliche Entspannen kann auch zu kurzzeitigen Kavitationserscheinungen führen, die wiederum als Lärmquelle fungieren.

3. Schnellläufigkeit als Ordnungsmaß für Turbo- und Verdrängermaschinen

Turbomaschinen ordnen sich bekanntlich nach der Schnelllaufzahl σ bzw. spezifischer Drehzahl n_s . Beide Größen sind proportional zueinander:

$$n_s = n \frac{Q^{1/2}}{Y^{3/4}}, \quad \sigma = 2.11 n_s. \quad (12)$$

Die spezifische Stutzenarbeit ist gleich der oben eingeführten isentropen Enthalpieänderung $Y = \Delta h_{t,s}$. Bei vernachlässigbarem kinetischem Energieanteil folgt daraus:

$$gH = Y = c_p(T_{2,s} - T_1) = c_p T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]. \quad (13)$$

Für $q \approx const$ gilt $Y = gH = \Delta p_t / q$. Es zeigt sich, dass sich alle am Markt befindlichen Maschinen mit der Schnellläufigkeit vom Typ her einordnen lassen. Dies trifft sowohl auf Turbomaschinen als auch auf Verdrängermaschinen zu und ist in Abb. 5 gezeigt. Diese Auftragung ist in anderer Form auch als verallgemeinertes Cordier-Diagramm bekannt und wurde erstmals von Grabow [3] in großer Systematik durchgeführt.

Die Auftragung nach Schnellläufigkeit hat den großen Vorteil, dass eine erste grobe Ordnungsgröße für den Maschinentyp d.h. die grobe Maschinengestalt (nicht Größe!) gefunden ist. Ungeachtet diese Nutzen sind zwei Dinge anzumerken: Erstens ist die Schnellläufigkeit eine rein kinematische Größe. Eine dynamische Größe wie dynamische Viskosität ist nicht enthalten. Bei Verdrängermaschinen wird in der Praxis aber die Viskosität des Fördermediums in deutlich weitem Grenzen variiert als dies bei Turbomaschinen der Fall ist. Zweitens ist die Zuordnung von Schnellläufigkeit (spez. Drehzahl) und Maschinentyp nicht eindeutig.

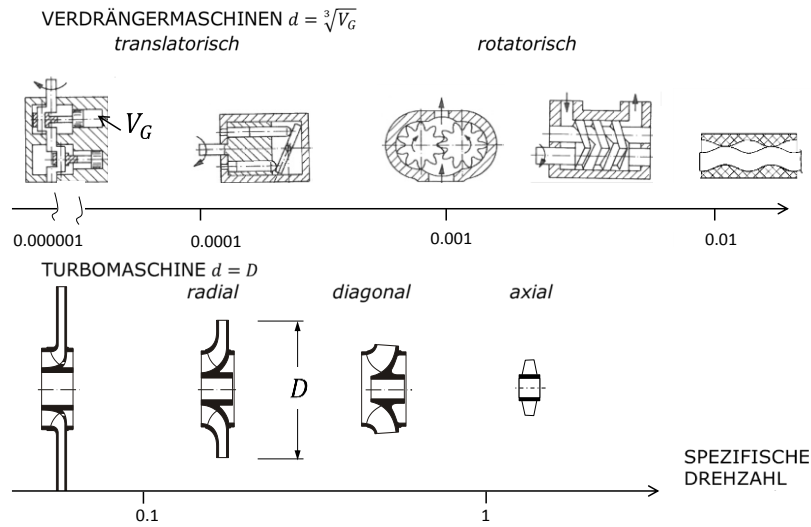


Abb. 6: Ordnung von Verdränger- und Turbomaschinen nach Schnellläufigkeit.

Bei Schnellläufigkeiten n_s zwischen $3 \cdot 10^{-3}$ und $3 \cdot 10^{-2}$ sind sowohl Turbomaschinen als auch Verdrängermaschinen im Markt anzutreffen. Abb. 7 zeigt links das verallgemeinerte Cordier-Diagramm. Links ist die Schnellaufzahl über der Durchmesserzahl aufgetragen. Rechts ist die Schnelllaufzahl über der Durchmesserzahl aufgetragen. Wie in Abb. 5 angegeben, wird als typische Länge der Laufraddurchmesser $d = D$ bzw. die Kubikwurzel des geometrischen Volumens $d = \sqrt[3]{V_G}$ gewählt. Bei einer Schnellaufzahl zwischen 0.01 und 0.1 ist eine Mehrdeutigkeit im Cordier-Diagramm festzustellen. Hier treten radiale Turbomaschinen, Seitenkanalmaschinen und Verdrängermaschinen zueinander in Wettbewerb. Es bestehen zuweilen funktionale Notwendigkeiten für die Wahl einer Maschine. Dies kann z.B. eine geringe Pulsation, hohe Energiedichte oder das Saugverhalten sein.

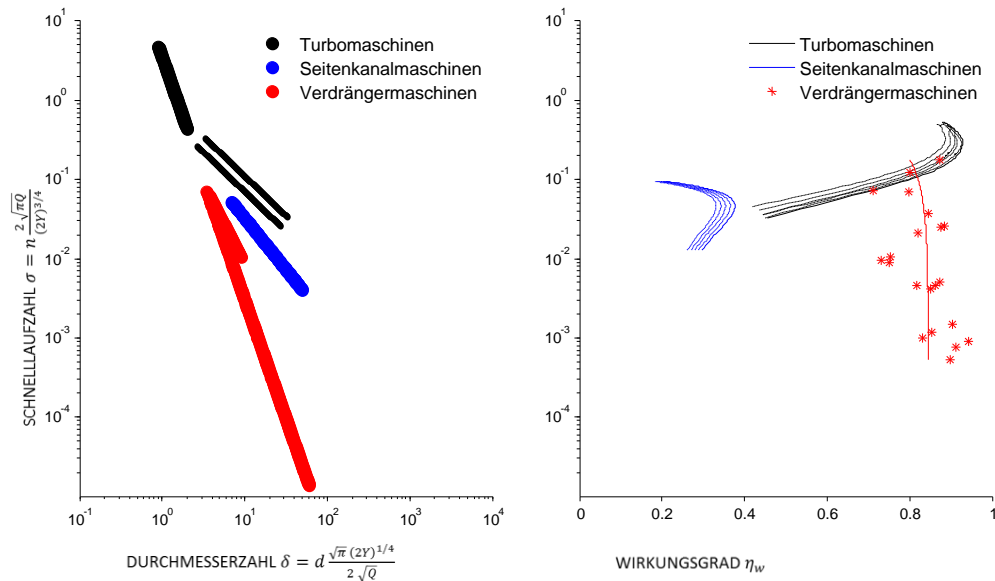


Abb. 7: Verallgemeinertes Cordier-Diagramm.

Es hat sich gezeigt, dass es im Zuge einer Energiediskussion sinnvoll ist, zwischen den Begriffen

16

1. Maschinentyp
2. Maschinengröße
3. funktionale Qualität
4. energetische Qualität

einer Maschine zu unterscheiden. Ungeachtet von Mehrdeutigkeiten im Cordier-Diagramm kann festgestellt werden, dass die spezifische Drehzahl sehr gut geeignet ist, den Maschinentyp zu bestimmen. Bei Turbomaschinen hat sich die Reynoldszahl als gutes Maß für die Maschinengröße erwiesen. Bei unveränderter Viskosität kann an die Stelle der Reynoldszahl der Volumenstrom als Größenmaß treten. Die Funktionalität einer Maschine kann sich bei gleicher Grobgestalt unterscheiden. So sind speziell gestalte Laufräder für groben Schmutz geeignet, manche Antriebskonzepte für den Betrieb in explosionsgefährdeter Umgebung u.s.w..

Für Turbomaschinen gilt demnach

$$BEP: \eta_w = \eta_w(\text{Typ} \sim n_s, \text{Größe} \sim Re, \text{Funktion}, \text{Qualität}) \quad (14)$$

Der Zusammenhang (14) ist im Grundsatz in der aktuellen Ökodesignrichtlinie für Wasserpumpen abgelegt (vgl. dieses Heft eben

dort). Interessanterweise ist die europäische Ventilatorindustrie einen anderen mehr politischen Weg gegangen, obgleich für eine Energiediskussion der Unterschied zwischen Pumpe und Ventilator vernachlässigbar ist. Hier wird deutlich, dass die physikalisch-technischen Grundlagen nur zum Teil die Normung beeinflussen.

Abb. 7 rechts zeigt Gleichung (14) für Kreiselpumpen. Da bei Kreiselpumpen in der Hauptsache Wasser als Medium verwendet wird, ist die Festschreibung der Viskosität und die Verwendung des Volumenstroms als Größenmaß kein Problem. Deutlich unterschiedlich verhält es sich mit den Verdrängermaschinen, die ganz unterschiedliche Medien fördern. Die Festschreibung einer Viskosität, wie von Grabow vorgeschlagen erscheint nicht sinnvoll. In der Tat ergibt sich eine schöne Alternative über eine physikalische Modellbildung unter Verwendung von dimensionsanalytischen Überlegungen.

Im Folgenden wird daher ein Ansatz verfolgt, bei dem ein dimensionsanalytisches Modell für den Wirkungsgrad einer Verdrängermaschine im Vordergrund steht. Damit wird im Prinzip der gleiche Weg beschritten, der in der Vergangenheit auch bei hydrodynamischen Maschinen an der TU Darmstadt beschritten wurde. Es hat sich gezeigt, dass physikalisch-technisches Wissen um die Fluidenergiemaschinen die Normungsarbeit sehr befruchtet.

4. Wirkungsgrad bei Verdrängermaschinen

Ausgehend von Gleichung (9) erweitern wir die Bestimmungsgleichung für den Wirkungsgrad einer inkompressibles flüssiges Medium fördernden Maschine um das das geometrische Volumen V_G :

$$\eta_w = \frac{\Delta p_t V_G}{2\pi M_w} \frac{Q}{nV_G} = \eta_m \eta_{vol}. \quad (15)$$

Der Gesamtwirkungsgrad kann also als Produkt zweier Einzelwirkungsgrade aufgefasst werden, dem *mechanischen Wirkungsgrad*

$$\eta_m := \frac{\Delta p_t V_G}{2\pi M_w} \quad (16)$$

und dem *volumetrischen Wirkungsgrad*

$$\eta_{vol} := \frac{Q}{nV_G}. \quad (17)$$

Die Diskussion um das Indikatordiagramm (Abb. 2) in Abschnitt 2 hat gezeigt, dass bei kompressiblem Fördermedium bzw. atmender Maschine volumetrischer und mechanischer Wirkungsgrad nicht unabhängig voneinander sind. Offensichtlich ergibt eine Nachgiebigkeit eine Reduktion des volumetrischen Wirkungsgrades. Diese wird aber durch eine gleichzeitige Zunahme des mechanischen Wirkungsgrades kompensiert, so dass in der Energiebilanz kein „Schaden“ eintritt. An der Diskussion ist ersichtlich, dass die gewählte Separation des Wirkungsgrades kritisch hinterfragt werden muss. Der Vorteil an der Aufspaltung liegt darin, dass der Gesamtwirkungsgrad einer jeden Verdrängermaschine einer einfachen Modellbildung zugänglich ist.

4.1. Volumetrischer Wirkungsgrad

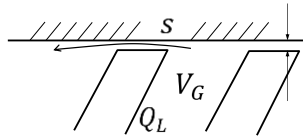


Abb. 8: Pumpenspiel und Leckagevolumenstrom.

Wird der volumetrische Wirkungsgrad als ein Maß für den inneren Leckagevolumenstrom Q_V verstanden, dann gilt

$$\eta_{vol} = 1 - \varepsilon_{vol}, \quad \varepsilon_{vol} = \frac{Q_V}{nV_G}. \quad (18)$$

Die volumetrische Ineffizienz ε_{vol} ist eine Funktion des *relativen Pumpenspiels*

$$\psi := \frac{s}{d}, \quad \text{mit } d = \sqrt[3]{V_G}. \quad (19)$$

Das relative Pumpenspiel wird vom Hersteller eingestellt bzw. stellt sich im Betrieb ein. Durch Verschleiß kann das relative Pumpenspiel z.B. über die Zeit zunehmen.

Der Betriebszustand der Maschine wird durch den Benutzer vorgegeben, der das Medium mit seiner dynamischen Viskosität μ und Dichte ϱ , Druck Δp_t und Drehzahl n wählt. Gemeinsam mit d folgende daraus mittels Dimensionsanalyse drei dimensionslose Produkte nämlich *Leckagezahl*, die auf einen Vorschlag meines Mitarbeiters Herrn Dipl.-Ing. Joachim Thurner zurückgeht,

$$\Lambda := \frac{\Delta p_t}{\mu n} \quad (20)$$

und ähnlich der Sommerfeldzahl ist, sowie der *Reynoldszahl*

$$\text{Re} := \frac{\varrho \sqrt{Y} d}{\mu}, \quad (21)$$

mit $Y = \Delta p_t / \varrho$. Die letzte Ziffer, die Druckziffer ist bei hydrostatischen Maschinen nicht von Relevanz und muss, da $Y / (nd)^2 \rightarrow \infty$, nicht berücksichtigt werden. Damit folgt für die volumetrische Ineffizienz

$$\varepsilon_{vol} = \varepsilon_{vol}(\Lambda, \text{Re}, \psi). \quad (22)$$

Im Grenzfall kleiner Reynoldszahl $Re \rightarrow 0$ hängt die volumetrische Ineffizienz aufgrund der Linearität der Bewegungsgleichung (Stokesche Gleichung) linear von der Leckagezahl ab. Daher kann (20) auch geschrieben werden als

$$\varepsilon_{vol} = \Lambda f(Re, \psi). \quad (23)$$

In der Konsequenz ist der spezifische Leckagestrom $f(Re, \psi)$ unabhängig von der Maschinendrehzahl. In der Tat zeigen die Messungen von Herrn Thurner an der TU Darmstadt dieses prognostizierte Verhalten eindrucksvoll (vgl. Abb. 9).

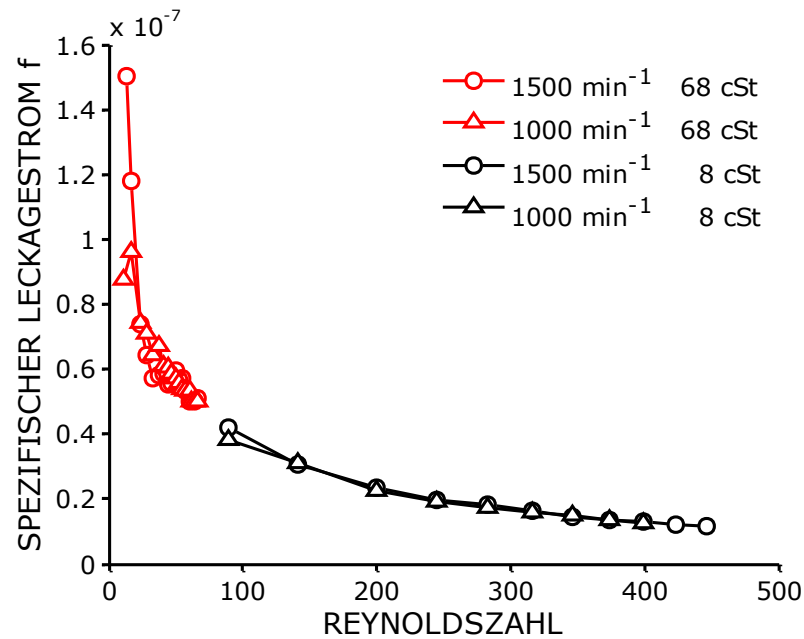


Abb. 9: Der spezifische Leckagestrom ist charakteristisch für jede Maschine.

4.2. Mechanischer Wirkungsgrad

Betrachtet man den Momentenfluss längs der Welle, so steht Gesamtmoment M_w nur das Nutzmoment $\Delta p_t V_G / 2\pi$ zur Verfügung. Auf dem Weg dorthin wird das Reibmoment M_R in den Spalten und Lagerstellen auf das Gehäuse übertragen. Der mechanische Wirkungsgrad kann demnach in die Form

$$\eta_m = \frac{\Delta p_t V_G}{2\pi M_w} = \frac{\Delta p_t V_G}{\Delta p_t V_G + 2\pi M_R} \quad (24)$$

gebracht werden. Das Reibmoment hat einen Coulombschen und einen viskosen Anteil $M_R = M_C + \mu n V_G C(\psi)$. Diese Aufspaltung entspricht der Abstraktion einer Stribeckkurve. Wird dieses Reibmodell in (22) eingesetzt und durch die theoretische Arbeit $\Delta p_t V_G$ geteilt, dann folgt für den inversen mechanischen Wirkungsgrad

$$\eta_m^{-1} = 1 + \mu_c + 2\pi \frac{C(\psi)}{\Lambda}, \text{ mit } \mu_c := \frac{2\pi M_C}{\Delta p_t V_G}. \quad (25)$$

Hier begegnet und wieder die Leckagezahl Λ sowie den Coulombschen Reibbeiwert μ_c sowie die zweite Spaltfunktion $C(\psi)$. Beide dimensionslosen Größen sind mit für die energetische Qualität der Maschine verantwortlich. In der Tat bestätigen unsere Messung die Form (22) des mechanischen Wirkungsgrades.

Damit ist ein einfaches physikalisch begründetes Modell gefunden, mit dem sich vermutlich ein Großteil der Verdrängermaschinen beschreiben lassen. Dies gilt insbesondere für die Maschinen, die flüssige Medien fördern.

$$\eta_w = \frac{1 - \Lambda f(Re, \psi)}{1 + \mu_c + 2\pi \frac{C(\psi)}{\Lambda}}. \quad (26)$$

Leckagezahl und Reynoldszahl geben den Betrieb der Maschine wieder. Spalt, spezifischer Leckagestrom sowie Reibverhalten geben die energetische Qualität der Maschine wieder. Abb. 10 zeigt den Verlauf von Gleichung (23) für eine gegebene Maschine.

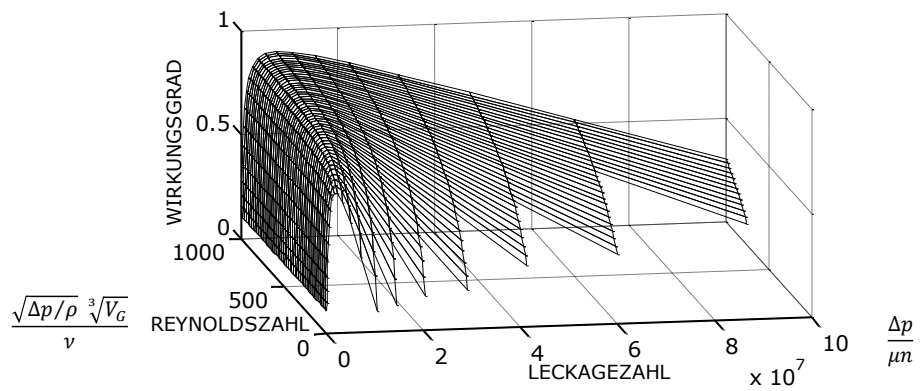


Abb. 10: Wirkungsgrad als Funktion von Leckagezahl und Reynoldszahl einer Verdrängermaschine.

Auf der Basis der bisherigen physikalisch-technischen Überlegungen ist es nun möglich gemeinsam mit der Pumpenindustrie voranzuschreiten.

Danksagung

Wir danken dem VDMA und seinen Mitgliedsfirmen, namentlich den Herren Holz, Fa. Wilo, und Werner, Fa. Allweiler, für die Diskussionen, die zu dem bisherigen Stand geführt haben. Besonderer Dank gilt Herrn Thurner, der wesentliche Ideen und messtechnische Validierungen beigesteuert hat.

Literatur

- [1] J.Lauer: Einfluss der Eintrittsbedingung und der Geometrie auf die Strömung in den Radseitenräumen von Kreiselpumpen, Dissertation Darmstadt 1999
- [2] A.Tamm: Beitrag zur Bestimmung der Wirkungsgrade einer Kreiselpumpe durch theoretische, numerische und experimentelle Untersuchungen, Dissertation Darmstadt 2002
- [3] G.Grabow: Optimalbereich von Pumpen unterschiedlicher Wirkprinzipien, Fachartikel Maschinenmarkt 2001
- [4] M. Nakhjiri, P.F.Pelz, B.Matyschok, A.Horn, L.Däubler: Apparent and Real Efficiency of Turbochargers under Influence of Heat Flow, Konferenzbeitrag, 14th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery 2012
- [5] P.F.Pelz, S.Stonjek: The influence of Reynolds number and roughness on the efficiency of axial and centrifugal fans: a physically based scaling method, Konferenzbeitrag Fan 2012
- [6] C.Buché, K.Wintterlin: Kolbenverdichter, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1968